Prof. Dr. Alfred Toth

Zeichen und Modellbegriff IV

1. Ich möchte meinen Ausführungen einige Definitionen und Theoreme aus Schwabhäuser (1971, S. 94 f., 116 u. 122 f.) voranstellen:

2. <u>Theorien und Klassen von Strukturen</u>

2.1. <u>Charakterisierung von Klassen von Strukturen</u>

In Beispiel 2), S. 37, haben wir gesehen, dass das dort angegebene unendliche Axiomensystem $\Sigma_{Kp,0}$ die Klasse der Körper der Charakteristik Null "charakterisiert" (genau die Strukturen aus dieser Klasse als Modelle besitzt). In diesem Abschnitt soll unter anderem gezeigt werden, dass es kein "gleichwertiges" oder "gleich-starkes" endliches Axiomensystem gibt. Einen entsprechenden Begriff der Gleichwertigkeit haben wir zunächst zu präzisieren.

<u>Definition</u>: Σ_1 ist STÄRKER als Σ_2 bzw. Σ_2 ist SCHWÄCHER als Σ_1 $(\Sigma_1 \models \Sigma_2)$ gdw für jedes $\alpha \in \Sigma_2$ gilt $\Sigma_1 \models \alpha$.

<u>Definition</u>: Σ_1 ist GLEICH-STARK oder auch ÄQUIVALENT mit Σ_2 $(\Sigma_1 =\parallel= \Sigma_2)$ gdw $\Sigma_1 \models \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \models \Sigma_1$.

<u>Satz 2.1.1.</u>: Sei Λ eine Sprache zum Typ Δ und $\Sigma_\nu \subset \Lambda$ für $\nu = 1,2$. Dann sind die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:
(i) $\Sigma_1 \models \Sigma_2$,
(ii) $\Sigma_2 \subset Cn_\Lambda(\Sigma_1)$,
(iii) $Cn_\Lambda(\Sigma_2) \subset Cn_\Lambda(\Sigma_1)$,
(iv) jedes Modell vom Typ Δ von Σ_1 ist auch Modell von Σ_2.

<u>Beweis</u>: Das ergibt sich sofort aus den Definitionen und den Hülleneigenschaften von Cn_Λ.

<u>Korollar 2.1.2</u>: Unter denselben Voraussetzungen sind auch untereinander äquivalent:
(i) $\Sigma_1 =\parallel= \Sigma_2$,
(ii) $\Sigma_1 \subset Cn_\Lambda(\Sigma_2)$ und $\Sigma_2 \subset Cn_\Lambda(\Sigma_1)$,
(iii) $Cn_\Lambda(\Sigma_1) = Cn_\Lambda(\Sigma_2)$,
(iv) Σ_1 und Σ_2 haben dieselben Modelle vom Typ Δ.

<u>Satz 2.1.3.</u>: $\models$ ist Quasiordnung auf $\Phi\Lambda$, d.h. es gilt
(i) $\Sigma \models \Sigma$ und
(ii) wenn $\Sigma_1 \models \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \models \Sigma_3$, so $\Sigma_1 \models \Sigma_3$.

<u>Beweis</u>: Am einfachsten erhält man das, indem man $\models$ durch die Beziehung (iii) von Satz 2.1.1. ausdrückt.

<u>Korollar 2.1.4.</u>: $=\parallel=$ ist Äquivalenzrelation auf $\Phi\Lambda$, d.h. es gelten
(i) $\Sigma =\parallel= \Sigma$,
(ii) wenn $\Sigma_1 =\parallel= \Sigma_2$, so $\Sigma_2 =\parallel= \Sigma_1$,
(iii) wenn $\Sigma_1 =\parallel= \Sigma_2$ und $\Sigma_2 =\parallel= \Sigma_3$, so $\Sigma_1 =\parallel= \Sigma_3$.

<u>Satz 2.1.5.</u>: Wenn Σ überhaupt gleich-stark mit einer endlichen Menge von Ausdrücken ist, so ist es schon gleich-stark mit einer endlichen Teilmenge von sich selbst.

<u>Beweis</u>: Sei $\Sigma =\parallel= \Sigma'$, wobei $\Sigma' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, und $\alpha = \bigwedge_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu$. Offenbar ist $\Sigma' =\parallel= \{\alpha\}$, also auch $\Sigma =\parallel= \{\alpha\}$ und speziell $\Sigma \models \alpha$. Nach dem Endlichkeitssatz (1.6.4.) folgt α schon aus einer endlichen Teilmenge Σ'' von Σ, für diese ist somit $\Sigma'' \models \{\alpha\}$. Mit $\{\alpha\} \models \Sigma$ ergibt sich $\Sigma'' \models \Sigma$. $\Sigma \models \Sigma''$ gilt trivialerweise wegen $\Sigma'' \subset \Sigma$. Also leistet Σ'' das Verlangte.

<u>Satz 2.1.6.</u>: Das Axiomensystem $\Sigma_{Kp,0}$ von S.37 für Körper der Charakteristik Null ist nicht gleich-stark mit einer endlichen Menge von Axiomen (Ausdrücken) (in der Prädikatenlogik der ersten Stufe!).

<u>Beweis</u>: Nehmen wir an, dass $\Sigma_{Kp,0}$ doch gleich-stark mit einer solchen Menge ist. Sei dann Σ' gemäss Satz 2.1.5. eine endliche Teilmenge von $\Sigma_{Kp,0}$ mit $\Sigma_{Kp,0} =\parallel= \Sigma'$. Sei p eine Primzahl, so dass $\neg \chi_p \notin \Sigma'$ (eine solche existiert, da Σ' endlich ist). Ist nun $\mathfrak{A}$ ein Körper der Charakteristik p, so gilt $\mathfrak{A}$ Mod Σ', aber nicht $\mathfrak{A}$ Mod $\Sigma_{Kp,0}$. Nach Korollar 2.1.2. ist also nicht

Im Bereich der verbalen Zeichen ist dasjenige semiotische Repertoire das „stärkere“, das z.B. neben standarddeutschen Wörtern und Phasen auch solche aus Dialekten enthält. Beispiele: stdt. wischen, stgalldt. wüsche, föörbe; stdt. Butter f., stgalldt. Putter m., berndt., zürichdt. Ankche; stdt. Idiot, stgalldt. Tubel, Lööli, usw.

Ein Ausdruck ϑ der hierbei auftretenden Form $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n (Rx_1 \ldots x_n \leftrightarrow \delta)$ bzw. $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_m \bigwedge y (fx_1 \ldots x_m \doteq y \leftrightarrow \delta)$, wobei die angegebenen generalisierten Variablen paarweise verschieden sind und δ beliebig mit $Fr(\delta) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $Fr(\delta) \subset \{x_1, \ldots, x_m, y\}$, heisst eine FORMALE DEFINITION (ein Ausdruck von Definitionscharakter) für R bzw. f ; dabei heisst δ das DEFINIENS und $Rx_1 \ldots x_n$ bzw. $fx_1 \ldots x_m \doteq y$ das DEFINIENDUM der formalen Definition ϑ. (In der angegebenen Form ist ϑ eine Aussage. Bisweilen werden aber die angegebenen Generalisierungen am Anfang auch weggelassen.)

<u>Bemerkungen</u>: 1. Ist eine Funktionskonstante f in T definierbar mit einem definiens δ wie oben, so ist $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n \overset{=1}{\bigvee} y \, \delta \in T$.

2. Eine Einführung von (Termen mit) Funktionszeichen als Abkürzungen (ohne Änderung der Objektsprache, erste Möglichkeit auf S.114), ist mit unseren Mitteln nicht immer möglich. Sie ist jedoch möglich, wenn eine Formalisierung der Prädikatenlogik mit "bestimmtem Artikel" zugrundegelegt wird (vgl. etwa Schröter [56]).

<u>Definition</u>: Seien T_1, T_2 Theorien mit $T_1 \subset T_2$; sei $\dagger_1 = \Lambda_1$, $\dagger_2 = \Lambda_2$.

T_2 ist eine DEFINITORISCHE ERWEITERUNG von T_1 auf Grund der Menge Θ von formalen Definitionen oder auch T_1 eine DEFINITORISCHE EINSCHRÄNKUNG von T_2 auf Grund von Θ genau dann, wenn gilt

(1) Θ ist eine Menge von formalen Definitionen mit definiens in Λ_1 und definiendum in $\Lambda_2 - \Lambda_1$, und zu jeder Konstanten R bzw. f von Λ_2, die nicht in Λ_1 vorkommt (kurz: "neue" Konstante), gibt es genau ein $\vartheta \in \Theta$, bei dem R bzw. f im definiendum steht (wir bezeichnen diesen Ausdruck mit ϑ_R bzw. ϑ_f).

(2) Für Funktionskonstanten gilt ausserdem: wenn $\vartheta_f = \bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_m \bigwedge y (fx_1 \ldots x_m \doteq y \leftrightarrow \delta_f) \in \Theta$, so $\bigwedge x_1 \ldots x_m \overset{=1}{\bigvee} y \, \delta_f \in T_1$.

(3) $T_2 = Cn(T_1 \cup \Theta)$.

<u>Satz 2.3.1.</u>: Sei T_1 Theorie, $\dagger_1 = \Lambda_1$, Λ_2 Erweiterungssprache von Λ_1, Θ Menge von formalen Definitionen mit den Eigenschaften (1) und (2). Dann gibt es genau eine definitorische Erweiterung T_2 von T_1 auf Grund von Θ.

<u>Beweis</u>: Gemäss (3) ist T_2 durch T_1 und Θ eindeutig festgelegt.

<u>Satz 2.3.2.</u>: <u>Vor.</u>: T_2 sei definitorische Erweiterung von T_1 auf Grund von Θ, $\dagger_\nu$ sei Sprache zum Typ Δ_ν $(\nu = 1, 2)$.

<u>Beh.</u>:

(i) Aus jedem Modell $\mathfrak{A}_2$ von T_2 entsteht durch Weglassen der den neuen Konstanten entsprechenden Funktionen und Relationen ein Modell $\mathfrak{A}_1$ von T_1.

(ii) Aus jedem Modell $\mathfrak{A}_1$ von T_1 (vom Typ Δ_1) entsteht durch Hinzunahme geeigneter Funktionen und Relationen für die neuen Konstanten ein Modell $\mathfrak{A}_2$ von T_2 (vom Typ Δ_2); dieses ist eindeutig bestimmt.

(iii) $T_1 = T_2 \cap \dagger_1$.

(iv) T_2 ist endliche Erweiterung von T_1 genau dann, wenn Θ endlich ist.

(v) Für eine geeignete Funktion Rd von T_2 in T_1, die unten konstruiert wird (Bildung einer "Reduzierten" $Rd(\alpha)$ von α durch Elimination der neuen Konstanten, effektive Konstruktion für Sprachen mit Bezeichnungssystem!) gilt:

$$\Theta \models Rd(\alpha) \leftrightarrow \alpha .$$

(vi) Wenn $\alpha \in T_2$, so $Rd(\alpha) \in T_1$.

Definitorische Erweiterungen bedeutet also die Einführung neuer Konstanten. Semiotisch sind diese primär als 0-stellige Relationen zu interpretieren. Ein in Toth (2007) extensiv betriebenes Experiment ist die Erweiterung der triadisch-trichotomischen nicht-transzendenten Peirceschen Zeichenklasse ZR = (M, O, I) zur tetradisch-trichotomischen Zeichenklasse ZR* = (Ω, M, O, I) mit eingebettetem Objekt als Vorstufe zu einer polykontexturaklen Zeichenklasse, da hier die Kontexturgrenze zwischen bezeichnetem Objekt (Ω) und bezeichnendem Objekt bzw. Objektbezug (O). Man kann allerdings, wie in früheren Arbeiten ebenfalls gezeigt, jede der drei Peirceschen semiotischen Kategorien mit ihrem ontologischen Gegenstück ergänzen und so von einer partiell-transzendenten zu einer voll-transzendenten Zeichenrelation übergehen unter Einbettung auch des realen Mittels und des effektiven Interpreten in die nunmehr 6-stellige Zeichenrelation (ZR*** = ($\mathcal{M}$, Ω , $\mathfrak{I}$, M, O, I). Ontologische Kategorien sind grundsätzlich als Konstanten und d.h. als 0-stellige Relationen aufzufassen.

__ad (3):__ Es ist $Cn(T_1 \cup \Theta) \subset T_2$, da $T_1 \cup \Theta \subset T_2$.
Für beliebiges $\alpha \in T_2$ ist $T_1 \cup \Theta \models Rd(\alpha) \leftrightarrow \alpha$ (nach obiger Beh.(v)), andererseits $Rd(\alpha) \in T_2 \cap \dagger_1 = T_1$ und damit ebenfalls $T_1 \cup \Theta \models Rd(\alpha)$, also (Abtrennung!) $T_1 \cup \Theta \models \alpha$, d.h. $\alpha \in Cn(T_1 \cup \Theta)$. Daher hat man auch $T_2 \subset Cn(T_1 \cup \Theta)$, womit (3) gezeigt ist.

__Satz 2.3.4.:__ Sei T_2 Theorie und Λ_1 Teilsprache von $\dagger_2$. Wenn jede ("neue") Konstante von T_2 , die nicht in Λ_1 vorkommt, in T_2 definierbar ist mit Konstanten von Λ_1 , dann ist T_2 definitorische Erweiterung von $T_1 =_{Df} T_2 \cap \Lambda_1$.

__Beweis:__ Wähle auf Grund der Voraussetzung zu jeder neuen Konstanten eine Definition $\vartheta \in T_2$ (Auswahlaxiom) und bilde daraus eine Menge Θ von formalen Definitionen. Dann liefert Satz 2.3.3. das Gewünschte.
(Das Auswahlaxiom wird offenbar nicht benötigt, wenn Λ_1 abzählbar oder die Menge der neuen Konstanten endlich ist.)

In 2.1. hatten wir die Begriffe "stärker als" und "gleichsstark" für Ausdrucksmengen (Axiomensysteme) derselben Sprache eingeführt. Wir können nun auch für Ausdrucksmengen in verschiedenen Sprachen etwas Entsprechendes einführen unter Benutzung formaler Definitionen.

__Definition:__ Σ_1 ist POTENTIELL STÄRKER als Σ_2 auf Grund von Θ ($\Sigma_1 \models_{\Theta\ \mathrm{pot}} \Sigma_2$) genau dann, wenn es eine Theorie T_1 mit dem Axiomensystem Σ_1 gibt, so dass Σ_2 enthalten ist in der definitorischen Erweiterung von T_1 auf Grund von Θ .

Hierbei ist zugelassen, dass die Sprache $\Lambda_1 = \dagger_1$ zusätzliche Konstanten enthält, die in Σ_1 nicht vorkommen. Somit ist Λ_1 (und damit $T_1 = Cn_{\Lambda_1}(\Sigma_1)$) nicht eindeutig bestimmt. Eine von dieser Sprache unabhängige Charakterisierung liefert der folgende Satz.

__Definition:__ Für eine Menge Θ von formalen Definitionen bedeute K_Θ die Menge der Konstanten, die in einem definiendum eines $\vartheta \in \Theta$ auftreten.

__Satz 2.3.5.:__ $\Sigma_1 \models_{\Theta\ \mathrm{pot}} \Sigma_2$ genau dann, wenn
(1') Θ ist eine Menge von formalen Definitionen derart, dass jede Konstante aus K_Θ in genau einem $\vartheta \in \Theta$ im definiendum und in keinem $\vartheta \in \Theta$ im definiens steht.
(2') Die Konstanten aus K_Θ kommen in Σ_1 nicht vor, und für Funktionskonstanten $f \in K_\Theta$ gilt: Wenn $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n \bigwedge y(fx_1 \ldots x_n \doteq y \leftrightarrow \delta_f) \in \Theta$, so $\Sigma_1 \models \bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n \bigvee^1 y\, \delta_f$.
(3') $\Sigma_1 \cup \Theta \models \Sigma_2$ (Def. S.94) .

Zum Beweis: Aus $\Sigma_1 \models_{\Theta\ \mathrm{pot}} \Sigma_2$ erhält man ohne Schwierigkeiten die Bedingungen (1'),(2'),(3'). Beim Beweis der Umkehrung kann man von einer beliebigen Sprache Λ ausgehen, die die gegebenen Mengen umfasst, und damit gleich noch den folgenden Satz beweisen, der den Übergang zu anderen Sprachen in der Definition ermöglicht.

__Satz 2.3.6.:__ Sei Λ eine beliebige Sprache mit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Theta \subset \Lambda$, Λ_1 die Sprache, die aus Λ durch Weglassen der Konstanten aus K_Θ entsteht, $\Sigma_1 \subset \Lambda_1$ und $T_1 = Cn_{\Lambda_1}(\Sigma_1)$. Dann ist $\Sigma_1 \models_{\Theta\ \mathrm{pot}} \Sigma_2$ genau dann, wenn Σ_2 enthalten ist in der definitorischen Erweiterung T von T_1 auf Grund von Θ (und dann ist $T = Cn_\Lambda(\Sigma_1 \cup \Theta)$).

__Definition:__ Σ_1 ist SCHWACH POTENTIELL ÄQUIVALENT mit Σ_2 auf Grund von Θ_1 und Θ_2 ($\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{sp}}{\models}_{\Theta_2}\; \Sigma_2$) genau dann, wenn $\Sigma_1 \models_{\Theta_1\ \mathrm{pot}} \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \models_{\Theta_2\ \mathrm{pot}} \Sigma_1$.

__Definition:__ Σ_1 ist POTENTIELL ÄQUIVALENT mit Σ_2 auf Grund von Θ_1 und Θ_2 ($\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{pot}}{\models}_{\Theta_2}\; \Sigma_2$) genau dann, wenn $\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{sp}}{\models}_{\Theta_2}\; \Sigma_2$ und $\Sigma_1 \cup \Theta_1 \dashv\models \Sigma_2 \cup \Theta_2$.

Die schwache potentielle Äquivalenz ist von der Definition her das genaue Gegenstück zur Äquivalenz von Ausdrucksmengen. In diesem Fall hat man aber keine Beziehung zwischen den durch die Definition gegebenen beiden definitorischen Erweiterungen. Für die potentielle Äquivalenz dagegen erhalten wir aus Satz 2.3.6. den

__Satz 2.3.7.:__ Sei Λ eine beliebige Sprache mit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Theta_1, \Theta_2 \subset \Lambda$. Dann ist $\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{pot}}{\models}_{\Theta_2}\; \Sigma_2$ gdw. es Theorien T_1, T_2 mit den Axiomensystemen Σ_1 bzw. Σ_2 gibt, die in der Sprache Λ eine gemeinsame definitorische Erweiterung T auf Grund von Θ_1 bzw. auf Grund von Θ_2 besitzen (und dann ist $T = Cn_\Lambda(\Sigma_1 \cup \Theta_1) = Cn_\Lambda(\Sigma_2 \cup \Theta_2)$).

__Satz 2.3.8.:__ $\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{pot}}{\models}_{\Theta_2}\; \Sigma_2$ genau dann, wenn Θ_1 mit Σ_1 und Θ_2 mit Σ_2 die Bedingungen (1') und (2') aus Satz 2.3.5. erfüllen und ausserdem gilt:
(R_1) $\Sigma_1 \models \{Rd_{\Theta_1}(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma_2 \cup \Theta_2\}$ und
(R_2) $\Sigma_2 \models \{Rd_{\Theta_2}(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma_1 \cup \Theta_1\}$.

__Beweis:__ ($\rightarrow$): Die Bedingungen (1') und (2') ergeben sich sofort aus Satz 2.3.5.. Seien Λ, T, T_1, T_2 wie in Satz 2.3.7. gewählt. Ist $\alpha \in \Sigma_2 \cup \Theta_2$, so ist $\alpha \in T$, also $Rd_{\Theta_1}(\alpha) \in T_1$ nach Beh.(vi) von Satz 2.3.2. und damit $\Sigma_1 \models Rd_{\Theta_1}(\alpha)$. Somit gilt auch (R_1). Analog ergibt sich (R_2) (unter Vertauschung der Indizes 1 und 2).
($\leftarrow$): Ist $\alpha \in \Sigma_2 \cup \Theta_2$, so ist $\Sigma_1 \models Rd_{\Theta_1}(\alpha)$ wegen (R_1), andererseits $\Theta_1 \models Rd_{\Theta_1}(\alpha) \leftrightarrow \alpha$, nach der Abtrennungsregel also $\Sigma_1 \cup \Theta_1 \models \alpha$. Damit haben wir $\Sigma_1 \cup \Theta_1 \models \Sigma_2 \cup \Theta_2$. Analog (unter Vertauschung der Indizes) ergibt sich die umgekehrte Richtung. Somit ist $\Sigma_1 \cup \Theta_1 \dashv\models \Sigma_2 \cup \Theta_2$. Nach Satz 2.3.5. ist ausserdem $\Sigma_1 \models_{\Theta_1\ \mathrm{pot}} \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \models_{\Theta_2\ \mathrm{pot}} \Sigma_1$ (es gilt auch jeweils die Bedingung (3')). Damit haben wir das in der Definition der potentiellen Äquivalenz Verlangte.

__Satz 2.3.9.:__ __Vor.:__ Θ_1 ist endlich, $\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{pot}}{\models}_{\Theta_2}\; \Sigma_2$ und Σ_1 äquivalent zu einem endlichen Axiomensystem.
__Beh.:__ Σ_2 ist äquivalent zu einem endlichen Axiomensystem.

__Beweis:__ Man kann sich zunächst auf endliche Mengen Θ_2 von formalen Definitionen beschränken. Nach Voraussetzung gilt nämlich $\Sigma_1 \cup \Theta_1 \dashv\models \Sigma_2 \cup \Theta_2$ und $\Sigma_1 \cup \Theta_1 \dashv\models \Sigma \cup \Theta_1$, wobei Σ ein endliches Axiomensystem von Σ_1 ist. Somit ist $\Sigma_2 \cup \Theta_2$ äquivalent mit der endlichen Menge $\Sigma \cup \Theta_1$, also gibt es nach Satz 2.1.5. eine endliche Teilmenge $\Theta_2^!$ von Θ_2 mit $\Sigma_2 \cup \Theta_2 \dashv\models \Sigma_2 \cup \Theta_2^!$; für eine solche hat man damit $\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{pot}}{\models}_{\Theta_2^!}\; \Sigma_2$ (vgl. Def. und Satz 2.3.5.). Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass Θ_2 endlich ist. Seien Λ, T, T_1, T_2 wie in Satz 2.3.7. gewählt. Dann hat $T = Cn_\Lambda(\Sigma_1 \cup \Theta_1)$ ein endliches Axiomensystem. Dass daraus gemäss Beh.(vii) von Satz 2.3.2. konstruierte Axiomensystem $\Sigma_2^!$ der definitorischen Einschränkung $T_2 = Cn_{\dagger_2}(\Sigma_2)$ von T ist dann ebenfalls endlich, da in Θ_2 insbesondere nur endlich viele neue Funktionskonstanten vorkommen. Somit ist Σ_2 äquivalent mit der endlichen Menge $\Sigma_2^!$.

Bisher haben wir bei der Feststellung der potentiellen Äquivalenz stets die zugrundeliegenden Mengen Θ_1 und Θ_2 von formalen Definitionen mit angegeben. Für das Folgende interessieren uns nur noch Sprachen Λ_1, Λ_2, zwischen denen durch diese Definitionen ein Übergang hergestellt wird, d.h. mit den Bezeichnungen von Satz 2.3.7., die Sprachen $\Lambda_1 = \dagger_1$ und $\Lambda_2 = \dagger_2$ für geeignetes Λ .

__Definition:__ Σ_1 ist mit Λ_1 potentiell äquivalent zu Σ_2 mit Λ_2 genau dann, wenn es Mengen Θ_1, Θ_2 und eine Sprache Λ mit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Theta_1, \Theta_2 \subset \Lambda$ gibt, so dass $\Sigma_1 \;{}_{\Theta_1}{\dashv}_{\mathrm{pot}}{\models}_{\Theta_2}\; \Sigma_2$ und für $\nu = 1,2$ gilt: Die Sprache Λ_ν entsteht aus Λ durch Weglassen der Konstanten von K_{Θ_ν} . (Sind $\Theta_1, \Theta_2, \Lambda$ so gewählt, so gilt insbesondere: $\Sigma_\nu \subset \Lambda_\nu$, und jedes definiens

Hier geschieht die Ausweitung nicht nur für 1 semiotisches Repertoire, sondern auf mehrere. Theoretisch ist eine Zeichenrelation ZR = {{M}, M, O, I} auf ZR+ = {{{M_i}, M, O, I} mit einer Menge bzw. Familie von Repertoires möglich. Z.B. kann eine solche Familie mehrere das Lexikon einer Standardsprache sowie die Regionalwörterbücher von Einzeldialekten umfassen. Sie kann aber auch Lexika verschiedener Sprachen umfassen. Z.B. liefert ist die Bedingung der Zeichenhaftigkeit für ung. fa „Wald" in {M_1} = Deutsch nicht erfüllt, aber in {M_2} erfüllt, falls wir von {{M}} = {M_1, M_2} ausgehen.

Anhand der wenigen Beispiele, die hier beigebracht werdne konnte, kann man ermessen, dass sich die Modelltheorie gerade dort eignet, wo „gemeinsame Einbruchstellen von Semiotik und Linguistik" (Bense) vorliegen.

Bibliographie

Schwabhäuser, Wolfram, Modelltheorie I. Mannheim 1971

Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Zeichen und Modellbegriff I-III. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

4.2.2011